**Modelagem estatística aplicada na prevenção ao *churn***

Lucas Franz Monteiro¹;Ana Julia Righetto2

1 Risco e Modelagem. Rua Francisco Freire – Jardim Carlos Cooper; 08664-300 Suzano, São Paulo, Brasil

2 Head in Statistics and Customer Experience, ALVAZ Agritech, Av. Ayrton Senna da Silva, 600, Londrina, Paraná, Brasil

**Modelagem estatística aplicada na prevenção ao *churn***

**Resumo**

TODO: Escrever resumo ao final do trabalho

**Palavras-chave:** (inserir até cinco palavras diferentes das contidas no título, separadas por ponto-e-vírgula).

**Introdução**

O avanço tecnológico, impulsionado pela globalização e por políticas públicas de inclusão digital, têm como uma das principais favorecidas a disseminação da informação, viabilizada pragmaticamente, pelas companhias de telecomunicação.

De acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística [IBGE] (2019b), 82,7% dos domicílios brasileiros, em 2019, tinham acesso à internet, tendo a região sudeste o maior índice, na qual 84,9% da população dispunha de acesso à internet. Ademais, 81% dos indivíduos com idade mínima de dez anos, possuía *smartphone* de uso pessoal, dos quais 91% acessavam a internet através do dispositivo.

No mesmo ano, a quantidade de empresas do setor de telecomunicações foi alavancada em 13%, com relação ao ano pregresso, contabilizando 11.043 companhias (IBGE, 2019a). Esse crescimento naturalmente favorece a competitividade no setor, e nesse cenário, para Ferreira (2012) é fundamental que as companhias fidelizem seus clientes, a fim de se manterem competitivas, e minimizarem o *churn*, evento que, de acordo com Glady e colaboradores (2009), é caracterizado pela perda de clientes para a concorrência.

Uma vez que as estratégias de retenção de clientes geram retornos sobre o investimento superiores às de captação de novos consumidores (Jahromi et al., 2014), o presente trabalho tem como objetivo aplicar técnicas de modelagem estatística, a saber, regressão logística binária clássica e multinível, na prevenção ao *churn*, auxiliando a companhia na tomada de decisões proativas para retenção de seus clientes, além de contribuir na elucidação das características que mais impactam a probabilidade de ocorrência do fenômeno.

**Material e Métodos**

O *dataset* utilizado no trabalho é composto por 7.043 clientes de uma companhia de telecomunicações fictícia, que presta serviços de telefonia e internet, no estado da Califórnia. Contabilizando originalmente 53 variáveis, o conjunto de dados oficialmente disponibilizado na plataforma IBM Cognos Analytics, indica que no terceiro trimestre de 2019, o índice de *churn* da companhia foi igual a 26,5%. O restante da base de dados é constituído por novos clientes, que contrataram os serviços recentemente, e por consumidores que já assinavam algum serviço, e mantiveram o contrato ativo.

As variáveis originais foram renomeadas, com o objetivo de facilitar a manipulação dos dados, de modo que os espaços em branco foram substituídos pelo caractere “\_”; as letras maiúsculas deram lugar a letras minúsculas; e as variáveis qualitativas binárias tiveram o prefixo “flg\_” acrescido aos seus nomes. Seguindo estes critérios, as variáveis inicialmente identificadas por *“Number of Referrals”* e *“Unlimited Data”*, foram renomeadas para *“number\_of\_referrals”* e *“flg\_unlimited\_data”*, respectivamente. Deliberou-se também por adaptar o conteúdo das variáveis binárias, originalmente constituídas pelos valores “Yes”, em casos de ocorrência do evento, e “No” em casos de não ocorrência do evento, para “1” e “0”, respectivamente.

A fim da enriquecer os dados, foram coletadas e anexadas ao *dataset* variáveis censitárias da população norte-americana, disponibilizadas pela pesquisa anual *American Community Survey*, a qual de acordo com o United States Census Bureau [USCB] (2022) incorpora características sociais, econômicas, demográficas e habitacionais da nação. Neste trabalho, optou-se por consultar as estimativas de cinco anos, que compreendem o período de 2013 a 2017, devido maior confiabilidade estatística para áreas geográficas menos populosas. Neste trabalho, aplicou-se a metodologia quantitativa aplicada descritiva.

Tabela 1. Variáveis do dataset original, selecionadas para utilização (continua)

|  |  |
| --- | --- |
| Variável | Descrição |
| customer\_id | Identificador único do cliente |
| gender | Sexo do cliente |
| age | Idade do cliente |
| flg\_married | Indica se o cliente é casado |
| number\_of\_dependents | Quantidade de dependentes que moram com o cliente |
| city | Cidade da residência principal do cliente |
| zip\_code | Cep da residência principal do cliente |
| latitude | Latitude da residência principal do cliente |
| longitude | Longitude da residência principal do cliente |
| number\_of\_referrals | Quantidade de indicações, feitas pelo cliente até o presente |
| tenure\_in\_months | Tempo de casa do cliente, ao final do trimestre |
| offer | Última oferta de marketing aceita pelo cliente, se aplicável |
| flg\_phone\_service | Indica se o cliente assina o serviço de telefonia residencial da companhia |
| avg\_monthly\_long\_distance\_charges | Valor mensal médio das cobranças de chamadas de longas distâncias, calculado até o final do trimestre |
| flg\_multiple\_lines | Indica se o cliente assina múltiplas linhas telefônicas da companhia |
| internet\_type | Tipo do serviço de internet assinado pelo cliente |
| avg\_monthly\_gb\_download | Volume mensal médio de download, em gigabytes, calculado até o final do trimestre |
| flg\_online\_security | Indica se o cliente assina um serviço adicional de segurança online, fornecido pela companhia |
| flg\_online\_backup | Indica se o cliente assina um serviço adicional de backup online, fornecido pela companhia |

Tabela 1. Variáveis do dataset original, selecionadas para utilização (conclusão)

|  |  |
| --- | --- |
| Variável | Descrição |
| flg\_device\_protection\_plan | Indica se o cliente assina a um plano adicional de proteção do dispositivo, para seu equipamento de internet, fornecido pela companhia |
| flg\_premium\_tech\_support | Indica se o cliente assina um plano adicional de suporte técnico da companhia, com tempos reduzidos de espera |
| flg\_streaming\_tv | Indica se o cliente utiliza a internet para assistir programas de televisão de um fornecedor externo |
| flg\_streaming\_movies | Indica se o cliente utiliza a internet para assistir filmes de um fornecedor externo |
| flg\_streaming\_music | Indica se o cliente utiliza a internet para escutar música de um fornecedor externo |
| flg\_unlimited\_data | Indica se o cliente pagou uma taxa mensal adicional, para ter downloads/uploads ilimitados |
| contract | Tipo de contrato atual do cliente |
| flg\_paperless\_billing | Indica se o cliente optou por cobrança sem papel |
| payment\_method | Método de pagamento, utilizado pelo cliente, para pagar a fatura |
| monthly\_charge | Valor total da mensalidade atual do cliente, cobrada por todos os serviços utilizados |
| total\_charges | Cobranças totais do cliente, exceto valores adicionais, cobrados por utilização superior ao especificado no plano do cliente, calculadas até o final do trimestre |
| total\_refunds | Reembolsos totais do cliente, calculados até o final do trimestre |
| total\_extra\_data\_charges | Cobranças totais do cliente, por downloads de dados extras, acima do especificado em seu plano, ao final do trimestre |
| total\_long\_distance\_charges | Cobranças totais do cliente, por chamadas de longa distância, acima das especificadas em seu plano, ao final do trimestre |
| satisfaction\_score | Índice da satisfação geral do cliente com a companhia |
| customer\_status | Status do cliente ao final do trimestre |
| flg\_churn | Indica se a firma perdeu o cliente |
| cltv | Valor do tempo de vida do cliente (Customer Lifetime Value). Quanto maior o valor, mais valioso o cliente |
| churn\_category | Categoria de alto-nível, para o motivo da perda do cliente. Todos os clientes, ao deixarem a companhia, são questionados sobre o motivo da saída |
| churn\_reason | Motivo específico da perda do cliente |

Fonte: International Business Machines Corporation [IBM] (2019)

Tabela 2. Variáveis construídas através do processo de feature engineering

|  |  |
| --- | --- |
| Variável | Descrição |
| valor\_cobranca\_geral | Cobranças gerais do cliente, incluindo valores adicionais por utilização superior ao especificado em seu plano, ao final do trimestre |
| tx\_valores\_reembolsados | Percentual de valores reembolsados, em relação às cobranças gerais |
| tx\_concentracao\_cobranca\_mes\_q3 | Quanto dos valores cobrados até o final do trimestre, estão concentrados na mensalidade atual do cliente |
| valor\_cobrancas\_extras | Valores totais, cobrados por chamadas de longa distância e downloads de dados extras, acima do especificado no plano do cliente, ao final do trimestre |
| tx\_contrib\_cobrancas\_extras\_cobranca\_geral | Representatividade dos valores cobrados de forma adicional, em relação aos valores gerais, cobrados do cliente |
| qtd\_servicos\_principais | Quantidade de serviços principais assinados pelo cliente. Os serviços principais são telefonia e internet |
| qtd\_servicos\_adicionais | Quantidade de serviços adicionais assinados pelo cliente |
| qtd\_streamings | Quantidade de streamings utilizados pelo cliente |

Fonte: Dados originais da pesquisa

Tabela 3. Variáveis censitárias, referentes ao condado da residência principal do cliente

|  |  |
| --- | --- |
| Variável | Descrição |
| county | Condado da residência principal do cliente |
| condado\_idade\_mediana\_habitantes | Idade mediana dos habitantes |
| condado\_indice\_gini\_desigualdade\_renda | Índice de gini, de desigualdade de renda |
| condado\_qtd\_habitantes | Quantidade de habitantes |
| condado\_renda\_familiar\_mediana | Renda familiar mediana |
| condado\_tx\_habitantes\_homens | Percentual da população composta por homens |
| condado\_tx\_habitantes\_menor\_18\_anos | Percentual da população composta por indivíduos menores de 18 anos |
| condado\_area\_terra\_m2 | Área territorial do condado, em metros quadrados |
| condado\_densidade\_populacional | Densidade populacional (número de habitantes / área) |

Fonte: Dados originais da pesquisa

Tabela 4. Variáveis censitárias, referentes ao código postal da residência principal do cliente (continua)

|  |  |
| --- | --- |
| Variável | Descrição |
| zip\_code\_idade\_mediana\_habitantes | Idade mediana dos habitantes |
| zip\_code\_indice\_gini\_desigualdade\_renda | Índice de gini, de desigualdade de renda |
| zip\_code\_qtd\_habitantes | Quantidade de habitantes |
| zip\_code\_renda\_familiar\_mediana | Renda familiar mediana |
| zip\_code\_tx\_habitantes\_homens | Percentual da população composta por homens |

Tabela . Variáveis censitárias, referentes ao código postal da residência principal do cliente

(conclusão)

|  |  |
| --- | --- |
| Variável | Descrição |
| zip\_code\_tx\_habitantes\_menor\_18\_anos | Percentual da população composta por indivíduos menores de 18 anos |
| zip\_code\_area\_terra\_m2 | Área territorial do cep, em metros quadrados |
| zip\_code\_densidade\_populacional | Densidade populacional (número de habitantes / área) |

Fonte: Dados originais da pesquisa

O conjunto de dados foi dividido em partições de treinamento e teste, e ao todo foram estimados dois modelos, sendo um modelo de regressão logística binária clássica, e um modelo de regressão logística binária multinível, os quais, com base no comportamento conjunto das variáveis preditoras, calcularam a probabilidade de *churn* de cada cliente. Os parâmetros do modelo clássico foram estimados por máxima verossimilhança, e os do modelo multinível, por máxima verossimilhança restrita, método que de acordo com Fávero e Belfiore (2017) gera estimações não viesadas da variância dos termos de erro.

A modelagem multinível foi aplicada com o intuito de permitir a identificação de heterogeneidades entre os clientes bem como entre os condados, possibilitando a especificação de componentes aleatórios em cada nível.

Nessa perspectiva, além dos parâmetros do modelo, também foram estimados os componentes de variância dos termos de erro do intercepto e do coeficiente angular, os quais tiveram suas significâncias estatísticas analisadas por meio de testes de razão de verossimilhança, de modo a identificar se a presença de níveis superiores gera aleatoreidades nos interceptos e nos declives, o que foi utilizado como indicador para definir se o modelo deveria ser estimado com interceptos aleatórios, com declives aleatórios, com ambos, ou se um modelo de regressão logística clássica era suficiente, caso identificada a ausência de aleatoreidades de interceptos e declive (Fávero e Belfiore, 2017).

Os modelos foram testados no conjunto de teste, a fim de avaliar a capacidade de generalização em dados não utilizados no treinamento, e tiveram suas performances comparadas por meio de testes da razão de verossimilhança. O desempenho de cada modelo também foi avaliado por meio de matrizes de confusão, e pela área sob a curva ROC (*Receiver Operating Characteristic*).

A curva ROC, segundo James e colaboradores (2021), é traçada por um gráfico que apresenta para todos os pontos de corte, a interação entre os verdadeiros positivos (sensitividade), e os falsos positivos (1 – especificidade) do modelo, plotados respectivamente no eixo das ordenadas e abscissas. A área sob a curva ROC, cujo valor máximo é um, foi utilizada para comparar a performance preditiva dos modelos, uma vez que quanto maior a área, maior a capacidade preditiva.

Na modelagem multinível, foram adotados dois níveis, cliente (nível 1), e condado (nível 2). Este tipo de modelo, de acordo com Fávero e Belfiore (2017), é denominado HLM2, onde “HLM” é acrônimo de *Hierarchical Linear Model* (do português “Modelo Linear Hierárquico”), e o numeral “2” indica que o modelo será aplicado a dados aninhados em dois níveis.

A linguagem de programação R v. 4.1.1 (R Core Team, 2021), foi utilizada para desenvolver o trabalho, com o auxílio dos pacotes:

* buildmer (Voeten, 2022) – Procedimento de *stepwise* em modelo multinível.
* caret (Kuhn, 2022) – Criação de amostras aleatórias estratificadas para treinamento e teste; construção de matrizes de confusão.
* ggrepel (Slowikowski, 2021) – Inclusão de rótulos não sobrepostos, nos gráficos.
* glmmTMB (Brooks et al., 2017) – Modelagem multinível.
* glue (Hester e Bryan, 2022) – Operações com dados em formato de texto.
* lmtest (Zeileis e Hothorn, 2002) – Comparar os *log-likelihoods* dos modelos, através de teste da razão de verossimilhança.
* pROC (Robin et al., 2011) – Calcular a área sob a curva ROC.
* readxl (Wickham e Bryan, 2019) – Leitura de *dataset* no formato xlsx.
* stats (R Core Team, 2021) – Treinar modelo de regressão logística binária.
* stringr (Wickham, 2019) – Operações com dados em formato texto.
* tidycensus (Walker e Herman, 2022) – Obtenção dos dados censitários da *American Community Survey.*
* tidyverse (Wickham et al., 2019) – Manipulação e transformação e de dados.
* tigris (Walker, 2022) – Obtenção de *shapefiles* do estado da Califórnia.
* zipcodeR (Rozzi, 2021) – Consulta das associações entre *zip codes* e condados do estado da Califórnia.

**Resultados e Discussão**

Foi constatado que os motivos mais comuns que acarretaram a perda de clientes, estão relacionados à alguma empresa concorrente oferecendo melhores dispositivos e planos, bem como aspectos relacionados ao comportamento ou postura do profissional do suporte técnico, conforme apresentado na Figura 1. Curiosamente, apenas 11,3% dos clientes cancelaram o serviço por razões vinculadas ao preço praticado pela companhia, e eventuais cobranças por utilização extra de serviços.

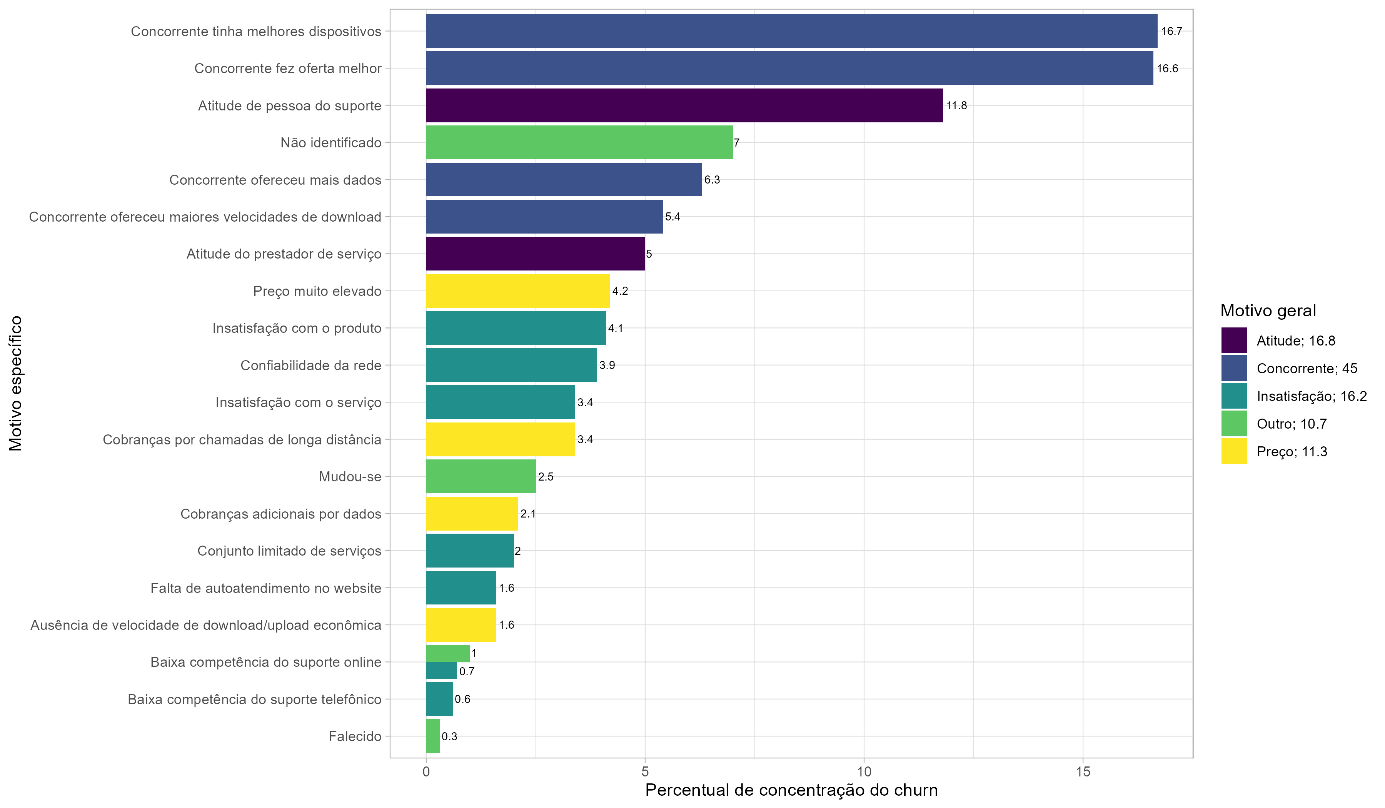


Figura 1. Distribuição dos motivos de churn

Fonte: Resultados originais da pesquisa

Para Mattison (2005), que segmenta o fenômeno do *churn* em duas grandes categorias, voluntário e involuntário, são participantes da primeira categoria os clientes que optam pela rescisão do contrato de serviço de forma deliberada ou não; e da segunda categoria, aqueles que têm o contrato rescindido por decisão e vontade da companhia, geralmente motivada por indícios de fraude, não pagamento ou não utilização do serviço.

Tendo em vista essa segmentação, entende-se que a totalidade dos eventos de *churn* presentes na base de dados em estudo é composta por casos voluntários, ou com um percentual de *churn* involuntário máximo equivalente ao da categoria genérica *“Other”*, isto é, 10,7%, constituída por clientes com motivo de cancelamento desconhecido, uma vez que os demais grupos *“Attitude”*; *“Competitor”*; *“Dissatisfaction”*; e *“Price”*, correspondem a formas distintas de cancelamento voluntário.

A satisfação dos clientes, que para Caldeira (2006) resulta da discrepância entre a percepção emocional do serviço, e a expectativa gerada pelas propagandas de *marketing*, tem, de acordo com Anderson e Sullivan (1993); e Fornell (1992), uma relação diretamente proporcional com a retenção, de modo que quanto maior a satisfação, maior a retenção. Esse fenômeno é salientado na distribuição da variável *“satisfaction\_score”*, conforme apresentado na Tabela 6, segundo a qual 100% dos clientes com score de satisfação inferior a três, incorreram no fenômeno do *churn*, e nenhum dos clientes com score maior ou igual a quatro cancelou o serviço.

Tabela 6. Percentual de churn, por índice de satisfação do cliente

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| satisfaction\_score | Quantidade de clientes | % Churn |
| 1 | 922 | 100 |
| 2 | 518 | 100 |
| 3 | 2.665 | 16,1 |
| 4 | 1.789 | 0 |
| 5 | 1.149 | 0 |

Fonte: Resultados originais da pesquisa

Dos clientes perdidos, 65% não apresentavam uma das principais características de fidelidade, a saber, a indicação do produto ou serviço para outras pessoas, e 90% fizeram no máximo uma indicação. Verificou-se também expressiva diferença no tempo de relacionamento com a companhia entre os consumidores que incorreram no evento do *churn*, e os demais. Para o primeiro público, o tempo médio de relacionamento foi de 18 meses, e para o segundo, de 37 meses, o que revela uma associação negativa entre as variáveis *“tenure\_in\_months”* e *“flg\_churn”*.

Ao fazer uma análise espacial dos dados, identificou-se que os condados com maior presença de clientes estão localizados ao sul do estado da Califórnia, a saber Los Angeles, o qual concentra 18,9% de todos os clientes, seguido por San Diego e Orange, os quais, juntos, não alcançam a mesma relevância de Los Angeles, congregando 13,8% dos clientes, conforme ilustrado na Figura 2.

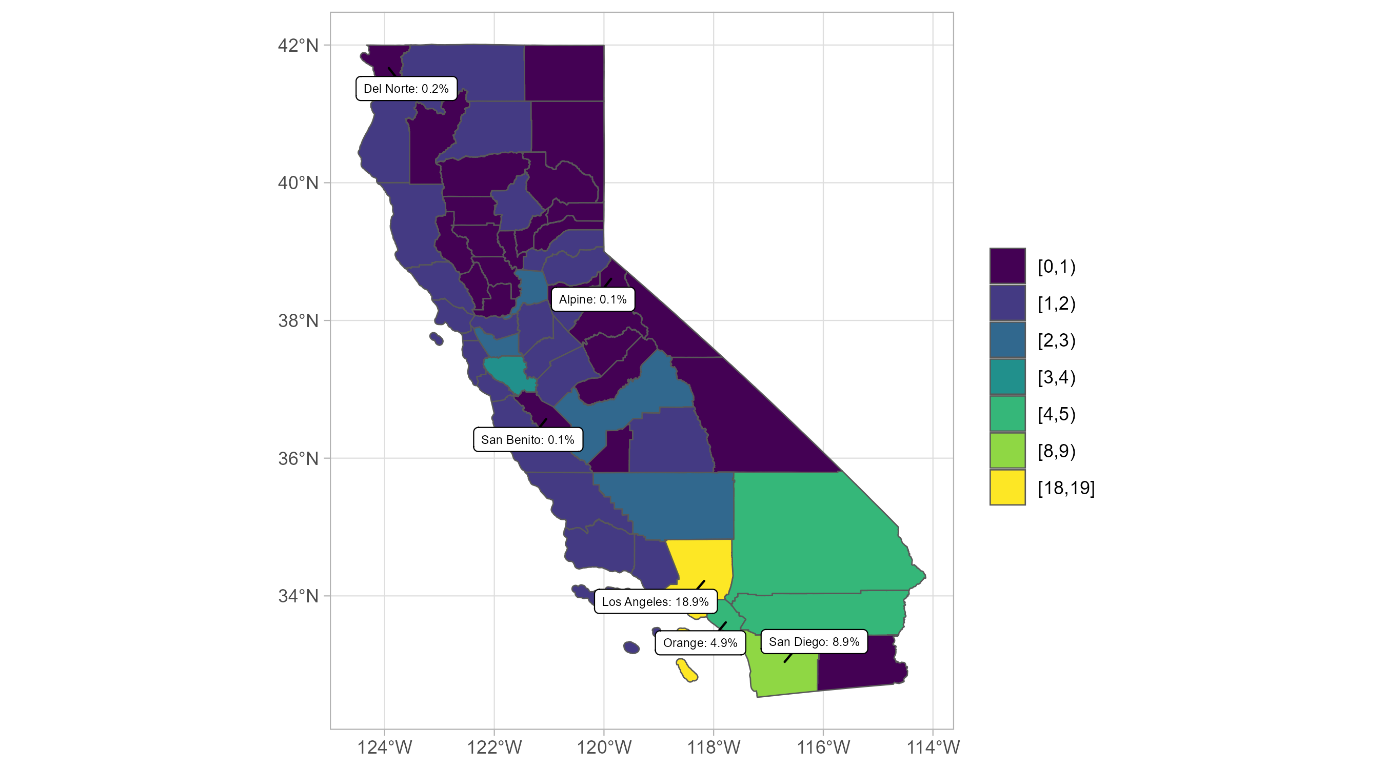


Figura 2. Distribuição de clientes, por condado, com destaque para os condados com maiores e menores representatividades

Fonte: Resultados originais da pesquisa

Salienta-se que os condados menos populosos do estado em que a companhia presta seus serviços, são os mais relevantes no aspecto do percentual da população que é ou foi cliente, como apresentado na Figura 3. Sierra, Alpine e Trinity estão entre os cinco condados com menor número de habitantes da Califórnia, e dos aproximadamente 2.885 habitantes de Sierra, 0,97% são ou já foram clientes da companhia em algum momento. Em contrapartida, juntos, os três condados contabilizam apenas 84 clientes, ou 1,2% do total de 7.043 consumidores.

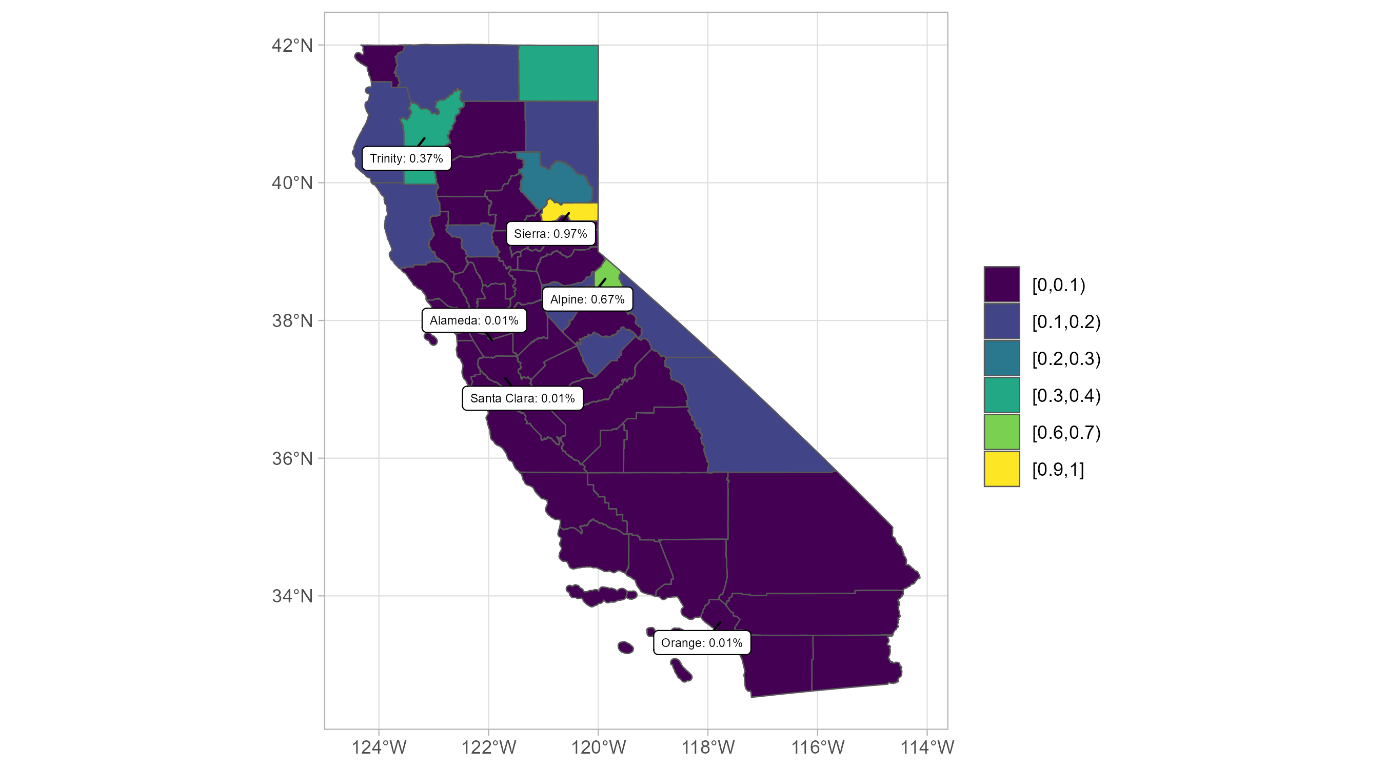


Figura 3. Proporção de habitantes, por condado, que foram ou são clientes da companhia, com destaque para os condados com maiores e menores representatividades

Fonte: Resultados originais da pesquisa

Del Norte, um dos condados com menor participação na carteira de clientes da companhia, foi a localidade com o maior índice de *churn*, como ilustrado na Figura 4, enquanto San Diego, o segundo condado com a maior quantidade de clientes, foi também o segundo com maior percentual de perda de clientes, seguido por Stanislaus.

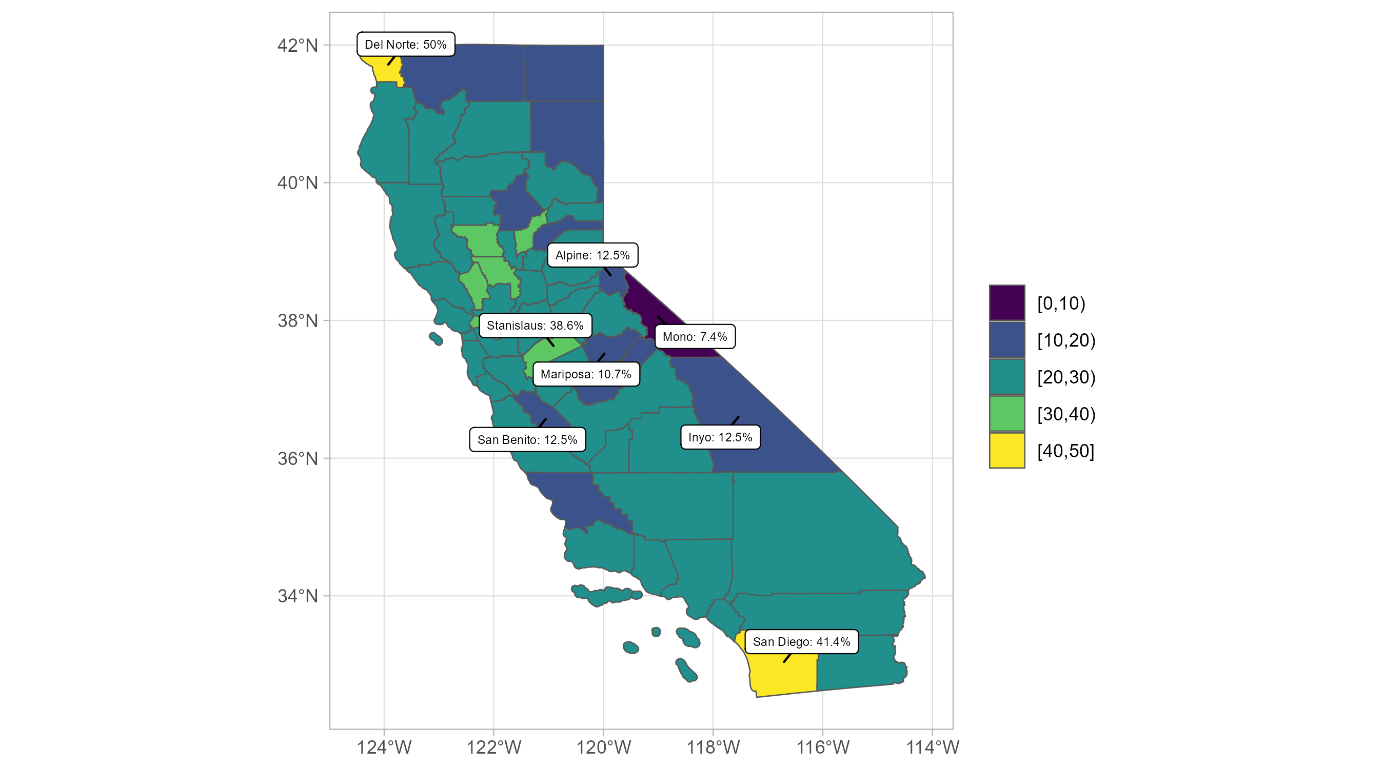


Figura 4. Índice de churn por condado

Fonte: Resultados originais da pesquisa

Conforme evidenciado na Figura 5, mais de 30% dos clientes que cancelaram o serviço, tem a residência principal localizada nos condados de Los Angeles e San Diego, situados ao sul do estado da Califórnia.

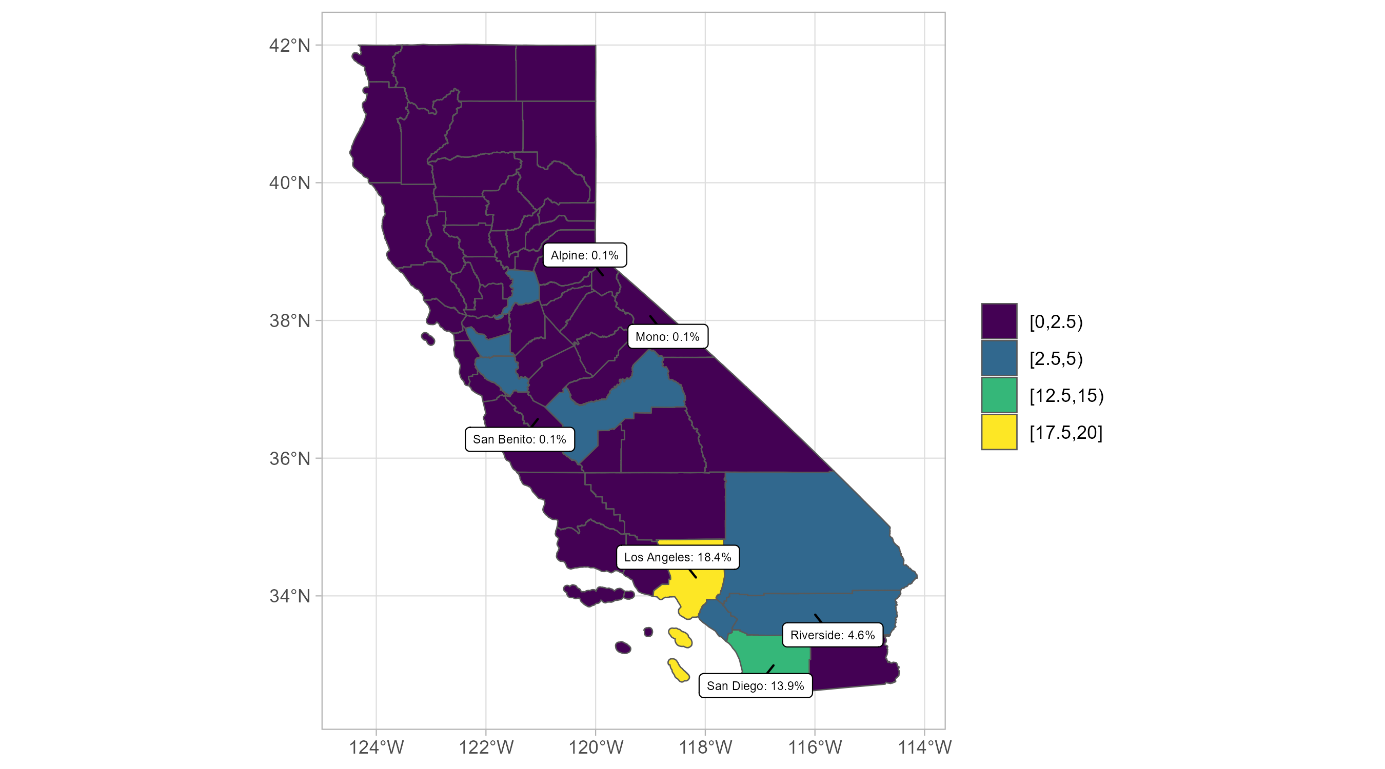


Figura 5. Distribuição do churn, por condado

Fonte: Resultados originais da pesquisa

Detectou-se também a existência de um cinturão geográfico, localizado majoritariamente ao norte, em que a razão mais recorrente de *churn* está relacionada à insatisfação com o serviço prestado pela companhia, conforme apresentado na Figura 6.

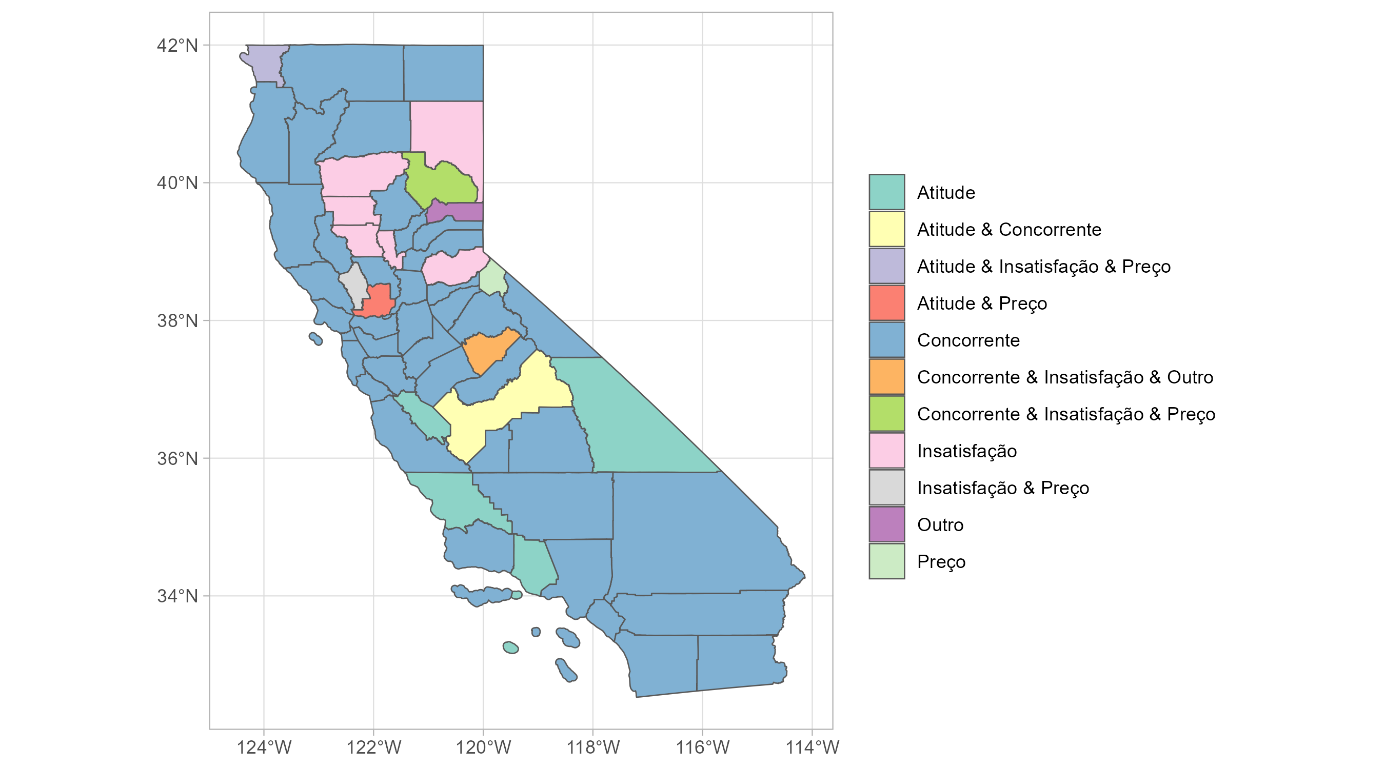


Figura 6. Motivos mais frequentes de churn, por condado

Fonte: Resultados originais da pesquisa

Terminada a análise espacial, calculou-se as correlações entre as variáveis dependentes numéricas, onde foi identificado que as três maiores correlações positivas acontecem com quatro variáveis relacionadas ao valor das cobranças, das quais duas foram construídas no processo de *feature engineering*. Conforme apresentado na Tabela 7, detectou-se correlação perfeita entre os valores extras cobrados por chamadas de longa distância e downloads de dados, e o valor das cobranças adicionais por chamadas de longa distância, uma vez que o segundo está contido no primeiro.

Tanto as cobranças totais como o tempo de casa do cliente, possuem elevada correlação positiva com o valor das cobranças gerais, representado no *dataset* pela variável “valor\_cobranca\_geral”, apontando a princípio que, logicamente que os valores cobrados incluindo ou não as despesas extras, seguem a mesma direção, de modo que o movimento ascendente de um está relacionado ao movimento ao movimente ascendente do outro, e vice-versa. De modo semelhante, o prolongamento do tempo de relacionamento do cliente com a companhia está vinculado a maiores cobranças gerais. Ambas correlações são superiores a 0.8, e figuram no ranking das três correlações de maior magnitude.

Segundo apresentado na Tabela 7, das dez maiores correlações em valor absoluto, apenas uma é negativa, e ocorre entre o percentual de pessoas com idade inferior a 18 anos, e a idade mediana dos habitantes do condado, indicando que nos condados, conforme a proporção de indivíduos menores de idade aumenta, a idade mediana dos habitantes naturalmente reduz, e vice-versa.

Tabela 7. Dez maiores correlações, em valor absoluto, entre variáveis preditoras numéricas

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Variável 1 | Variável 2 | Correlação |
| valor\_cobrancas\_extras | total\_long\_distance\_charges | 1,000 |
| valor\_cobranca\_geral | total\_charges | 0,972 |
| valor\_cobranca\_geral | tenure\_in\_months | 0,853 |
| qtd\_servicos\_principais | monthly\_charge | 0,836 |
| total\_charges | tenure\_in\_months | 0,826 |
| valor\_cobrancas\_extras | valor\_cobranca\_geral | 0,780 |
| valor\_cobranca\_geral | total\_long\_distance\_charges | 0,779 |
| tx\_contrib\_cobrancas\_extras\_cobranca\_geral | avg\_monthly\_long\_distance\_charges | 0,745 |
| condado\_tx\_habitantes\_menor\_18\_anos | condado\_idade\_mediana\_habitantes | -0,723 |
| qtd\_streamings | monthly\_charge | 0,695 |

Fonte: Resultados originais da pesquisa

Ao passar pelo processo de enriquecimento com variáveis geográficas do USCB (2022), o *dataset*, composto por clientes com residência em 1.626 ceps distintos, passou a ter colunas com valores faltantes, segundo apresentado na Tabela 8. Devido o impacto da ausência de conteúdo em alguns algoritmos de modelagem, que na etapa de treinamento eventualmente omitem observações com valores faltantes, e a acentuada granularidade da variável “zip\_code”, optou-se por não utilizar na modelagem estatística, as variáveis com dados de cep.

Seguindo o mesmo raciocínio, as colunas com dados geográficos das cidades nas quais estão localizadas as residências dos clientes, também foram excluídas da modelagem. Mantiveram-se, entretanto, as variáveis com dados geográficos dos 58 condados nos quais a firma presta serviço.

Tabela 8. Número de observações para as quais dados geográficos de cep estão faltando

|  |  |
| --- | --- |
| Variável | Quantidade de observações com dados faltantes |
| zip\_code\_renda\_familiar\_mediana | 428 |
| zip\_code\_indice\_gini\_desigualdade\_renda | 104 |
| zip\_code\_idade\_mediana\_habitantes | 84 |
| zip\_code\_tx\_habitantes\_homens | 20 |
| zip\_code\_tx\_habitantes\_menor\_18\_anos | 20 |

Fonte: Resultados originais da pesquisa

Além destas, foram removidas do processo de modelagem outras seis variáveis, sendo elas “customer\_id”, “latitude”, “longitude”, “customer\_status”, “churn\_category”, “churn\_reason”, as quais, de acordo com o conhecimento prévio do negócio, são incapazes de contribuir para explicar o fenômeno em análise, ou são desdobramentos da variável resposta, como é o caso das três últimas colunas supracitadas.

Inicialmente treinou-se o modelo clássico de regressão logística com todas as variáveis manualmente escolhidas, e posteriormente aplicou-se o procedimento de seleção gradual de variáveis, com diferentes critérios, incluindo gradativamente no modelo, apenas variáveis que contribuíssem para a redução do AIC (Akaike Information Criterion) Incluir referência sobre AIC. A finalidade desse procedimento foi obter um modelo com maior capacidade preditiva, uma vez que de acordo com ISLR (20XX), excluir variáveis que não ajudam a prever o evento de interesse, reduz a taxa de erro nos dados de teste.

Na Figura 8, observa-se que na direção regressiva, o modelo iniciou completo, com todas as variáveis disponíveis para treinamento, e a quantidade de variáveis reduziu a cada uma das 66 iterações, tendo iniciado com um total de 115, e terminado com 50 variáveis dependentes. Nas abordagens progressiva e bidirecional, o modelo iniciou vazio, sem nenhuma variável preditora, e o número de variáveis dependentes ampliou-se de igual modo até a vigésima-quinta iteração.

Na vigésima-sexta iteração, a estratégia progressiva inseriu uma nova variável, e de modo antagônico, o critério bidirecional excluiu uma variável do modelo. Outra ruptura de padrão deu-se na trigésima-quarta iteração, na qual uma nova variável foi excluída pelo critério de seleção bidirecional. Ressalta-se que na estratégia progressiva, o número de variáveis aumentou a cada iteração.

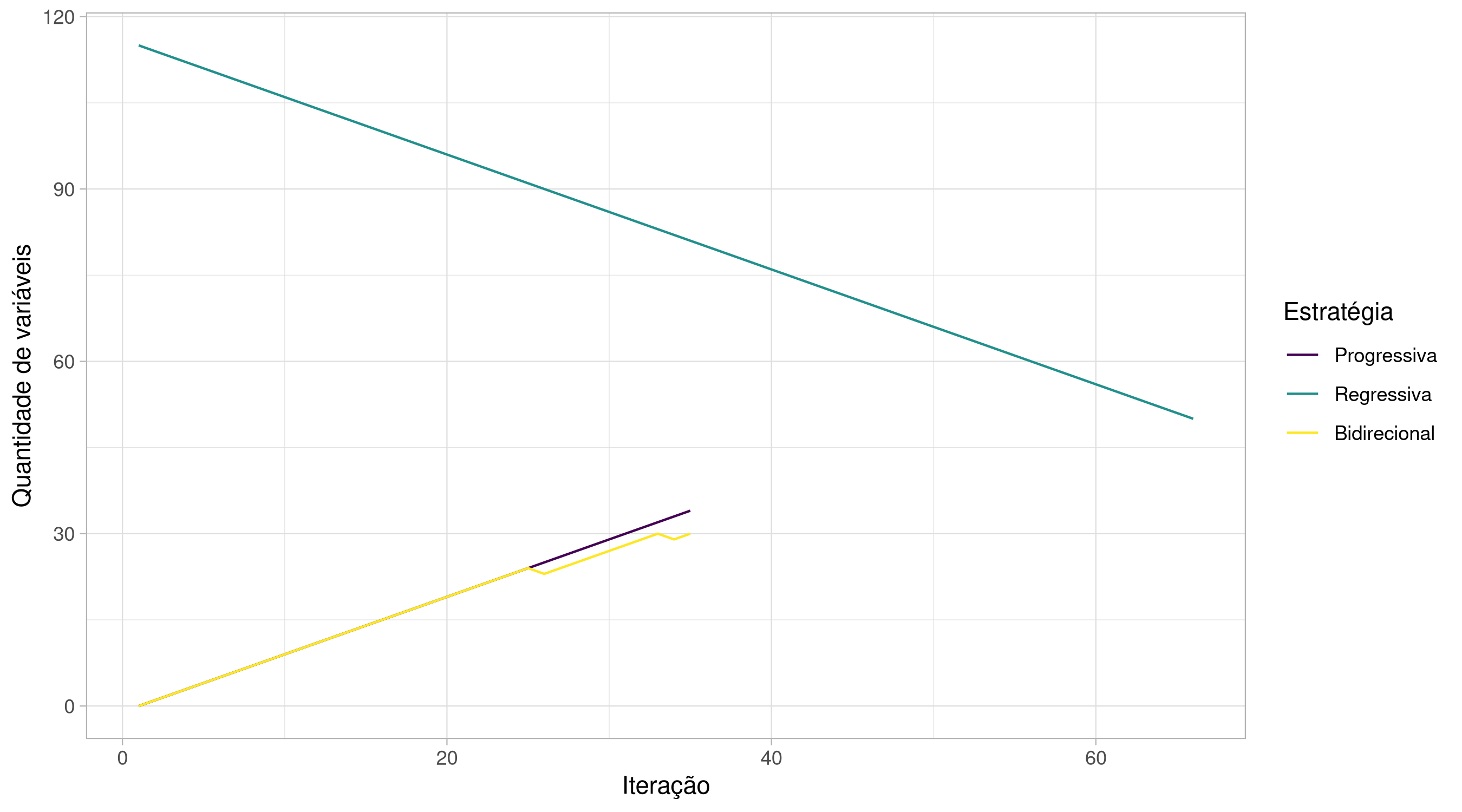


Figura 8. Quantidade de variáveis selecionadas, em cada iteração do procedimento de seleção gradual de variáveis, de acordo com a direção escolhida

Fonte: Resultados originais da pesquisa

A cada iteração, o AIC do modelo foi reduzido, o qual atingiu um valor mínimo ao final do processo. Conforme ilustrado na Figura 9, o AIC inicial dos modelos estimados pelas estratégias progressiva e bidirecional, manteve-se idêntico até a vigésima-quinta iteração, sendo que na iteração seguinte, o modelo resultante da abordagem progressiva teve pequena degradação do AIC, sendo visualmente imperceptível ao analisar a Figura 9. A desigualdade se manteve mínima ao longo de todas as iterações.

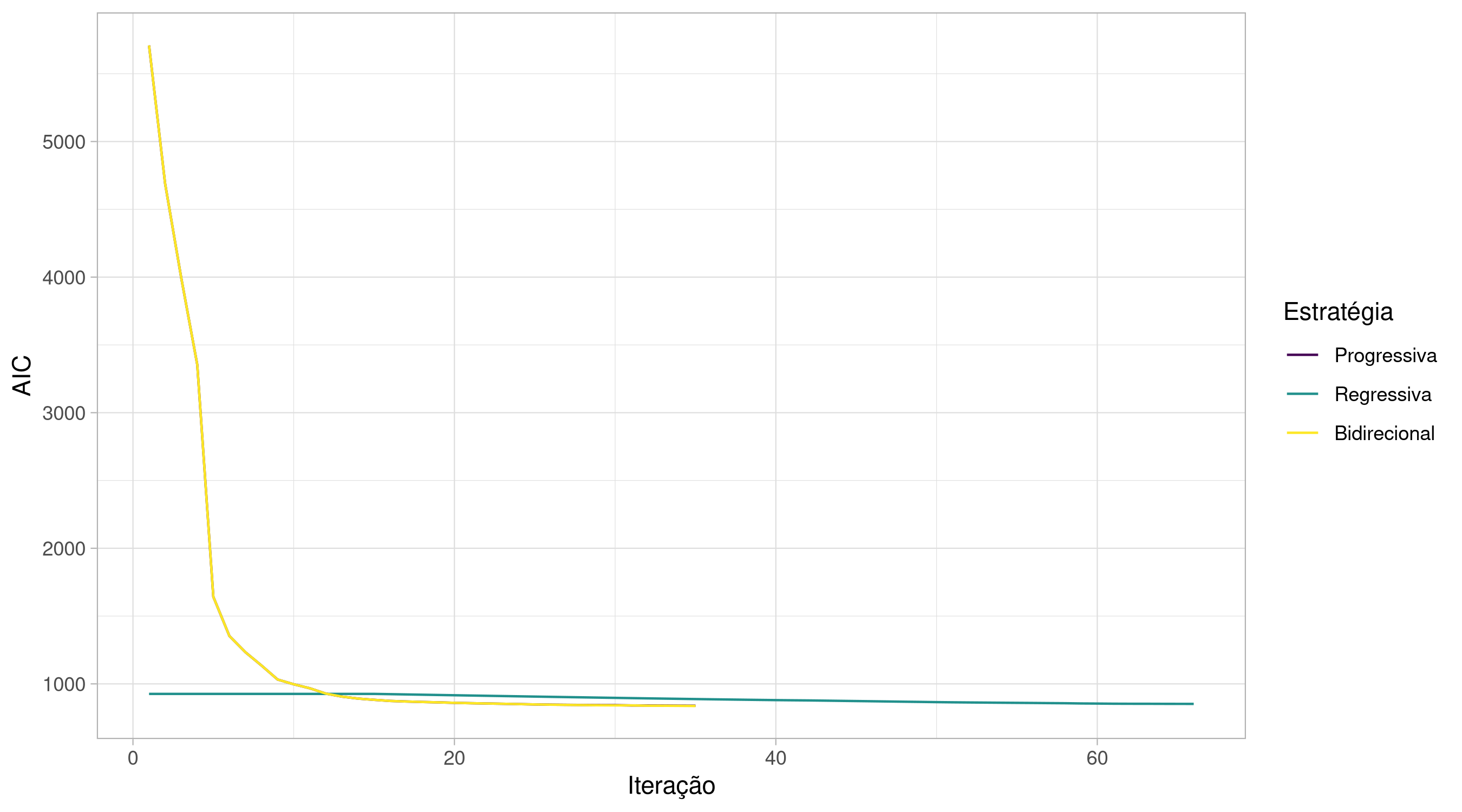


Figura 9. Redução do AIC, a cada iteração do procedimento de seleção gradual de variáveis, de acordo com a direção escolhida

Fonte: Resultados originais da pesquisa

De acordo com a Tabela 9, das três estratégias, a bidirecional resultou no modelo mais performático, alcançando um AIC de 836,78, com um total de 30 variáveis preditoras, ao final de 35 iterações. A quantidade de iterações na estratégia progressiva foi idêntica, a qual estimou um modelo final com quatro variáveis preditoras a mais, e AIC superior em 1.93 unidades ao do melhor modelo. O critério de seleção regressiva resultou no modelo menos performático, com o maior número de variáveis dependentes, 20 a mais que o melhor modelo, e AIC igual a 852,35.

Tabela 9. Resumo das reduções de AIC, no treinamento dos modelos de regressão logística, com diferentes critérios de seleção gradual

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Estratégia | Iteração | AIC | Quantidade de variáveis |
| Progressiva | 1 | 5709,08 | 0 |
| Progressiva | 35 | 838,71 | 34 |
| Regressiva | 1 | 926,07 | 115 |
| Regressiva | 66 | 852,35 | 50 |
| Bidirecional | 1 | 5709,08 | 0 |
| Bidirecional | 35 | 836,78 | 30 |

Fonte: Resultados originais da pesquisa

A capacidade preditiva do modelo obtido pela estratégia de seleção de variáveis bidirecional foi avaliada para diferentes pontos de corte, e verificou-se, como ilustrado na Figura 10, a existência de uma relação diretamente proporcional entre o aumento do ponto de corte e a queda da sensitividade Incluir referência sobre sensitividade, de modo que quanto maior a probabilidade mínima aceita para que um cliente seja classificado como perdido para a companhia, menor o número de clientes que incidem no evento e são assim classificados pelo modelo.

Por exemplo, ao adotar um ponto de corte de 95%, apenas clientes com probabilidade maior ou igual a 95% de incidirem no evento, serão classificados como perdidos. Contudo, de todos os clientes efetivamente perdidos, apenas 78,6% atendem a esse critério, de modo que os demais 21,4%, passam a não ser classificados como incidentes no evento, por terem probabilidade de perda inferior a 95%.

Observou-se que a diferença entre acurácia, especificidade e sensitividade foi reduzida ao definir o ponto de corte em 25%.

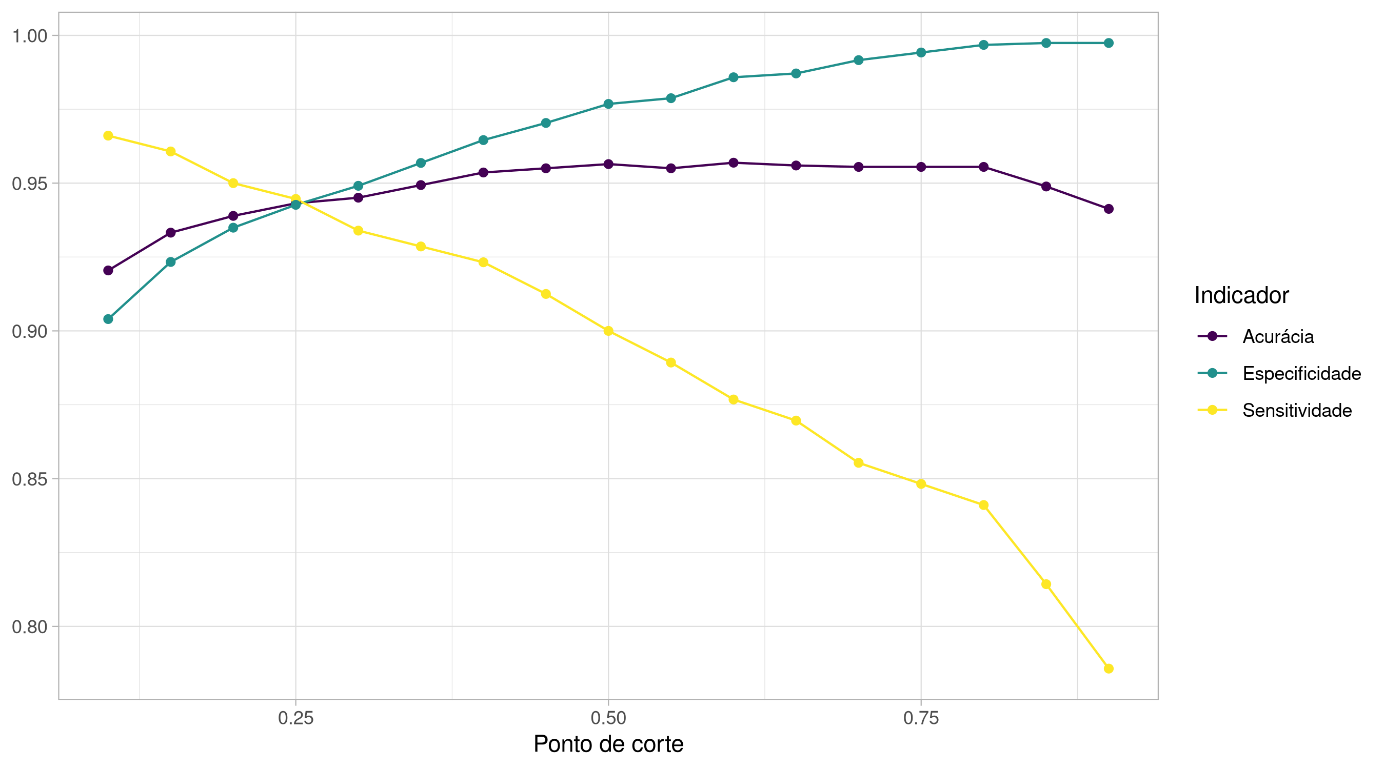


Figura 10. Indicadores da capacidade preditiva do modelo de regressão logística com seleção gradual de variáveis em ambas as direções, para diferentes pontos de corte

Fonte: Resultados originais da pesquisa

Dos coeficientes estimados para o melhor modelo de regressão logística, o coeficiente associado às variáveis “satisfaction\_score\_3”, “satisfaction\_score\_4” e “satisfaction\_score\_5” é negativo, e o p-valor (incluir referência sobre o p-valor) associado a cada uma das três variáveis não é estatisticamente significante. A negatividade dos coeficientes indica que clientes com os *scores* de satisfação iguais a três, quatro ou cinco possuem probabilidade de *churn* inferior aos demais clientes, o que faz sentido, uma vez que *scores* maiores indicam maior satisfação do cliente com a companhia.

De acordo com ISL (2022), a acurácia dos coeficientes estimados é medida por seus respectivos erros padrão, e valores absolutos elevados da estatística z servem de evidência contrária à hipótese nula, segundo a qual a variável dependente associada ao coeficiente não é útil para prever o evento de interesse, e portanto o coeficiente é igual a zero. Esse comportamento pode ser observado na Tabela 10, na qual valores absolutos pequenos da estatística z ocorrem em coeficientes cujo p-valor não é estatisticamente significante, como acontece com as variáveis de satisfação do cliente, e algumas referentes ao condado onde está localizada a residência do cliente “county\_Mendocino\_County”, “county\_Lake\_County”, relacionadas aos condados de Mendocino e Lake, respectivamente.

Fórmula para calcular a estatística z associada a cada variável preditora:

β̂1 /SE(β̂1 )

Tabela 10. Coeficientes estimados para cada uma das variáveis preditoras do modelo de regressão logística clássica com maior capacidade preditiva, segundo o critério AIC

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Variável preditora | Coeficiente | Erro padrão | Valor z | Pr(>|z|) |
| (Intercept) | 34,794 | 1380,479 | 0,025 | 0,980 |
| satisfaction\_score\_4 | -60,216 | 1747,677 | -0,034 | 0,973 |
| satisfaction\_score\_5 | -60,679 | 1970,931 | -0,031 | 0,975 |
| satisfaction\_score\_3 | -38,961 | 1380,479 | -0,028 | 0,977 |
| flg\_online\_security1 | -3,701 | 0,451 | -8,214 | 0,000 |
| number\_of\_referrals | -0,672 | 0,110 | -6,115 | 0,000 |
| monthly\_charge | 0,077 | 0,012 | 6,242 | 0,000 |
| tx\_concentracao\_cobranca\_mes\_q3 | 2,176 | 0,364 | 5,976 | 0,000 |
| contract\_Two\_Year | -2,364 | 0,425 | -5,558 | 0,000 |
| flg\_married1 | 1,832 | 0,286 | 6,396 | 0,000 |
| number\_of\_dependents | -0,964 | 0,191 | -5,048 | 0,000 |
| county\_San\_Diego\_County | 1,312 | 0,290 | 4,524 | 0,000 |
| flg\_premium\_tech\_support1 | -0,933 | 0,249 | -3,753 | 0,000 |
| flg\_phone\_service1 | -2,376 | 0,573 | -4,149 | 0,000 |
| contract\_One\_Year | -0,851 | 0,279 | -3,051 | 0,002 |
| offer\_Offer\_E | 0,611 | 0,275 | 2,223 | 0,026 |
| county\_Mendocino\_County | -18,072 | 2180,543 | -0,008 | 0,993 |
| offer\_Offer\_A | 1,477 | 0,537 | 2,748 | 0,006 |
| county\_Lake\_County | -16,676 | 1029,119 | -0,016 | 0,987 |
| age | 0,014 | 0,006 | 2,441 | 0,015 |
| county\_Nevada\_County | -18,672 | 2308,246 | -0,008 | 0,994 |
| tx\_contrib\_cobrancas\_extras\_cobranca\_geral | 5,731 | 2,018 | 2,840 | 0,005 |
| county\_Fresno\_County | 1,038 | 0,542 | 1,914 | 0,056 |
| county\_El\_Dorado\_County | 1,444 | 0,828 | 1,743 | 0,081 |
| county\_Tulare\_County | -1,463 | 0,806 | -1,816 | 0,069 |
| total\_charges | 0,000 | 0,000 | -2,647 | 0,008 |
| county\_San\_Mateo\_County | -1,743 | 1,120 | -1,556 | 0,120 |
| avg\_monthly\_long\_distance\_charges | -0,050 | 0,019 | -2,626 | 0,009 |
| valor\_cobrancas\_extras | 0,001 | 0,000 | 2,098 | 0,036 |
| internet\_type\_Fiber\_Optic | -0,792 | 0,371 | -2,135 | 0,033 |
| flg\_online\_backup1 | -0,395 | 0,231 | -1,711 | 0,087 |

Fonte: Resultados originais da pesquisa

Para o modelo de regressão logística multinível, inicialmente quis-se identificar quais eram as variáveis dependentes categóricas com maiores coeficientes de correlação intraclasse ajustado, e verificou-se, conforme apresentado na Tabela 12, que das dezoito variáveis selecionadas, cinco possuem coeficiente superior a 0,15. A variável relacionada à satisfação do cliente com a companhia, “satisfaction\_score” apresenta o maior coeficiente de correção intraclasse, indicando que 99% das diferenças entre o evento de churn estão relacionadas à satisfação do cliente.

Tabela 12. Coeficientes de correlação intraclasse, calculados para variáveis dependentes categóricas

|  |  |
| --- | --- |
| Efeito aleatório | Coeficiente de correlação intraclasse ajustado |
| satisfaction\_score | 0,990 |
| contract | 0,381 |
| flg\_internet\_service | 0,191 |
| offer | 0,180 |
| internet\_type | 0,155 |
| payment\_method | 0,085 |
| flg\_online\_security | 0,068 |
| flg\_paperless\_billing | 0,064 |
| flg\_premium\_tech\_support | 0,061 |
| flg\_unlimited\_data | 0,056 |
| flg\_married | 0,035 |
| county | 0,013 |
| flg\_online\_backup | 0,012 |
| flg\_device\_protection\_plan | 0,007 |
| flg\_streaming\_tv | 0,006 |
| flg\_streaming\_movies | 0,006 |
| flg\_streaming\_music | 0,003 |
| flg\_multiple\_lines | 0,002 |

Fonte: Resultados originais da pesquisa

Tabela 13. Indicadores dos modelos de regressão logística multinível

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Efeito aleatório | offer | contract | satisfaction\_score | flg\_internet\_service |
| Quantidade de iterações | 9833 | 17759 | 10783 | 10146 |
| Quantidade de efeitos fixos | 43 | 37 | 40 | 62 |
| AIC | 849,215 | 859,524 | 872,918 | 906,324 |
| AUC | 0,988 | 0,989 | 0,99 | 0,986 |
| BIC | 1141,863 | 1113,152 | 1146,057 | 1322,535 |
| logLik | -379,607 | -390,762 | -394,459 | -389,162 |
| deviance | 759,215 | 781,524 | 788,918 | 778,324 |

Fonte: Resultados originais da pesquisa

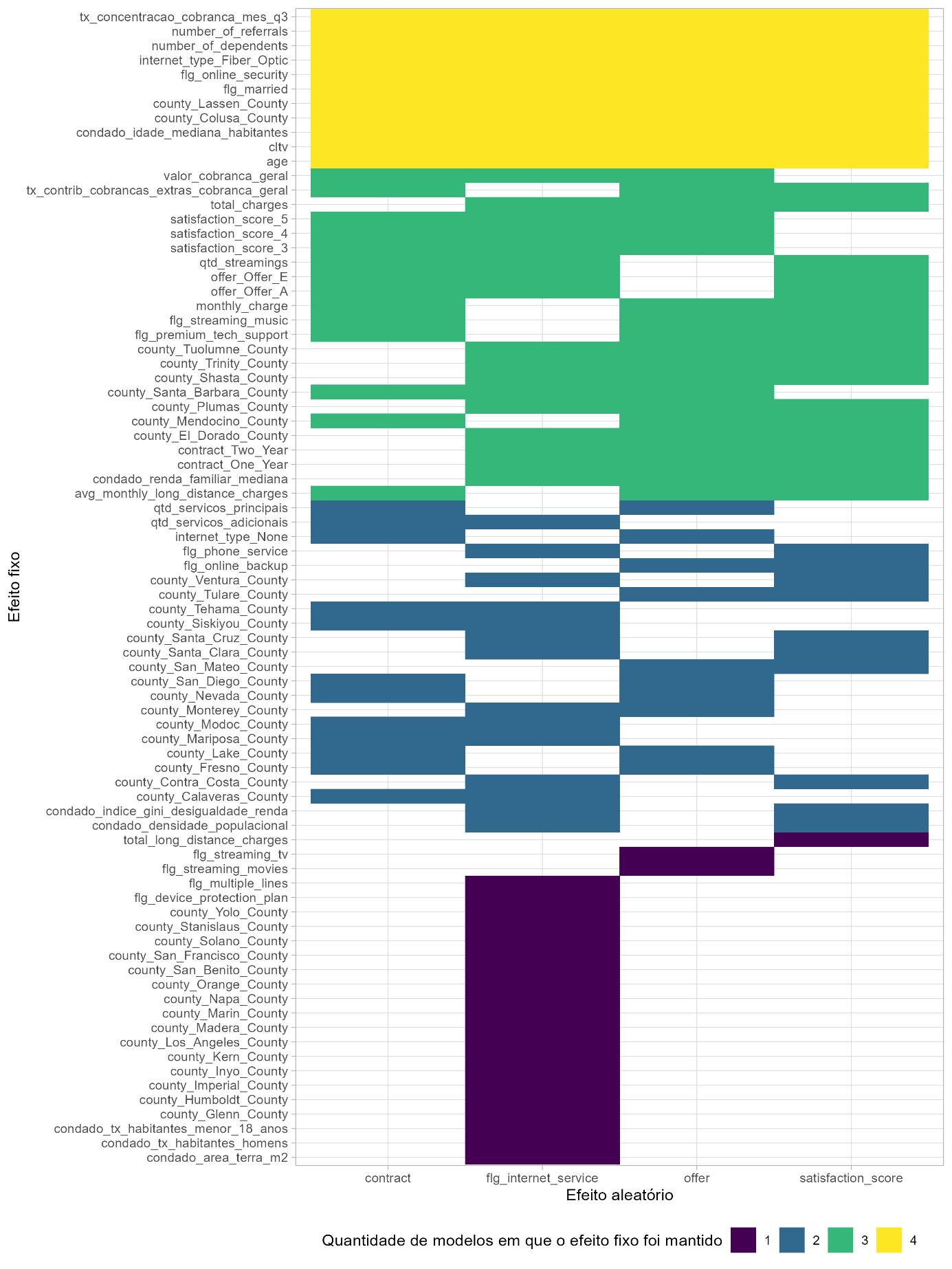


Figura 11. Matriz de efeitos fixos e aleatórios

Fonte: Resultados originais da pesquisa

Tabela 14. Coeficientes estimados para cada um dos efeitos fixos do modelo multinível de regressão logística, no qual a variável "offer" é o efeito aleatório

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Variável preditora | Coeficiente | Erro padrão | Valor z | Pr(>|z|) |
| (Intercept) | 38,499 | 2218,451 | 0,017 | 0,986 |
| satisfaction\_score\_4 | -63,360 | 2801,296 | -0,023 | 0,982 |
| satisfaction\_score\_5 | -63,746 | 3168,909 | -0,020 | 0,984 |
| satisfaction\_score\_3 | -40,890 | 2218,451 | -0,018 | 0,985 |
| flg\_online\_security1 | -3,964 | 0,472 | -8,391 | 0,000 |
| internet\_type\_None | -2,235 | 0,845 | -2,646 | 0,008 |
| number\_of\_referrals | -0,662 | 0,111 | -5,959 | 0,000 |
| tx\_concentracao\_cobranca\_mes\_q3 | 2,490 | 0,377 | 6,606 | 0,000 |
| flg\_married1 | 1,765 | 0,294 | 6,012 | 0,000 |
| number\_of\_dependents | -1,054 | 0,198 | -5,323 | 0,000 |
| contract\_Two\_Year | -2,116 | 0,401 | -5,277 | 0,000 |
| monthly\_charge | 0,121 | 0,026 | 4,553 | 0,000 |
| county\_San\_Diego\_County | 1,222 | 0,297 | 4,110 | 0,000 |
| flg\_premium\_tech\_support1 | -1,045 | 0,270 | -3,870 | 0,000 |
| qtd\_servicos\_principais | -3,465 | 0,783 | -4,425 | 0,000 |
| contract\_One\_Year | -0,880 | 0,284 | -3,101 | 0,002 |
| county\_Mendocino\_County | -18,584 | 3495,313 | -0,005 | 0,996 |
| county\_Lake\_County | -16,285 | 1656,465 | -0,010 | 0,992 |
| county\_Nevada\_County | -18,620 | 3251,761 | -0,006 | 0,995 |
| age | 0,020 | 0,007 | 2,997 | 0,003 |
| county\_Tulare\_County | -1,296 | 0,851 | -1,523 | 0,128 |
| county\_Fresno\_County | 1,236 | 0,565 | 2,189 | 0,029 |
| tx\_contrib\_cobrancas\_extras\_cobranca\_geral | 6,049 | 2,581 | 2,344 | 0,019 |
| county\_El\_Dorado\_County | 1,861 | 0,861 | 2,161 | 0,031 |
| internet\_type\_Fiber\_Optic | -1,838 | 0,681 | -2,701 | 0,007 |
| flg\_online\_backup1 | -0,572 | 0,256 | -2,233 | 0,026 |
| county\_San\_Mateo\_County | -2,247 | 1,142 | -1,967 | 0,049 |
| cltv | 0,000 | 0,000 | -1,584 | 0,113 |
| county\_Colusa\_County | 1,921 | 1,190 | 1,615 | 0,106 |
| avg\_monthly\_long\_distance\_charges | -0,057 | 0,024 | -2,408 | 0,016 |
| county\_Lassen\_County | 2,512 | 1,224 | 2,051 | 0,040 |
| condado\_renda\_familiar\_mediana | 0,000 | 0,000 | 2,440 | 0,015 |
| county\_Shasta\_County | 1,441 | 0,740 | 1,947 | 0,052 |
| county\_Plumas\_County | 2,498 | 1,391 | 1,795 | 0,073 |
| condado\_idade\_mediana\_habitantes | -0,051 | 0,031 | -1,666 | 0,096 |
| county\_Trinity\_County | 2,026 | 1,457 | 1,390 | 0,164 |
| county\_Tuolumne\_County | 1,379 | 1,034 | 1,333 | 0,182 |
| valor\_cobranca\_geral | 0,001 | 0,000 | 2,424 | 0,015 |
| total\_charges | -0,001 | 0,000 | -2,634 | 0,008 |
| flg\_streaming\_tv1 | -0,511 | 0,350 | -1,460 | 0,144 |
| flg\_streaming\_movies1 | -1,125 | 0,470 | -2,391 | 0,017 |
| flg\_streaming\_music1 | 0,765 | 0,361 | 2,121 | 0,034 |
| county\_Monterey\_County | 0,802 | 0,619 | 1,296 | 0,195 |
| county\_Santa\_Barbara\_County | 0,992 | 0,770 | 1,288 | 0,198 |

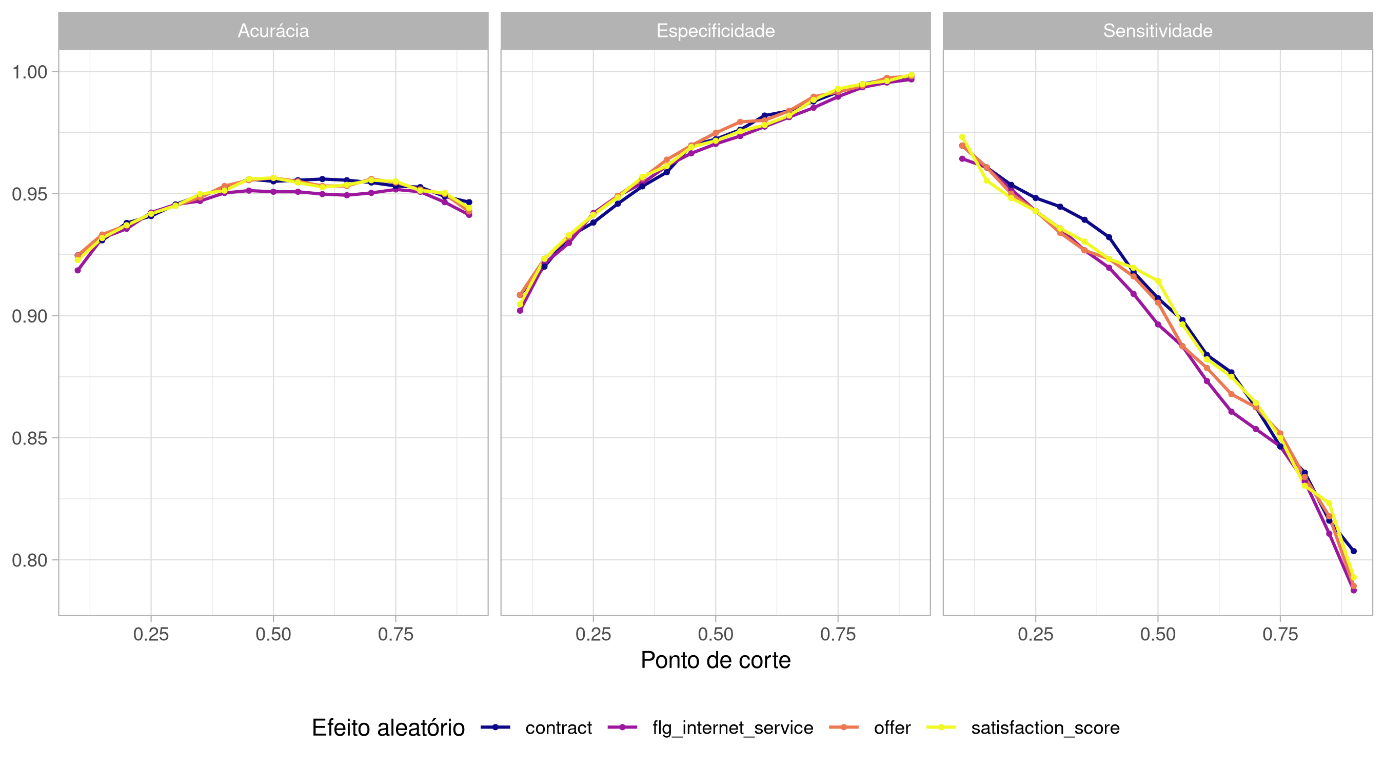


Figura 12. Indicadores da capacidade preditiva dos modelos hierárquicos de regressão logística, com efeitos aleatórios distintos, para diferentes pontos de corte

Fonte: Resultados originais da pesquisa

Diversos modelos (árvore de decisão e random forest)

Tabela 11. Amostra de perfis identificados pelo modelo de árvore de decisão

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Perfil | % Churn | % Observações que satisfazem as características |
| satisfaction\_score em ('4', '5') | 0% | 42% |
| satisfaction\_score == '3' e tx\_concentracao\_cobranca\_mes\_q3 >= 0.19 e flg\_online\_security == '1' e county em ('Alameda County', 'Alpine County', 'Butte County', 'Calaveras County', 'Humboldt County', 'Imperial County', 'Kern County', 'Kings County', 'Lake County', 'Los Angeles County', 'Marin County', 'Mariposa County', 'Merced County', 'Modoc County', 'Mono County', 'Nevada County', 'Placer County', 'Riverside County', 'Sacramento County', 'San Joaquin County', 'San Luis Obispo County', 'San Mateo County', 'Santa Clara County', 'Santa Cruz County', 'Shasta County', 'Siskiyou County', 'Sonoma County', 'Stanislaus County', 'Tulare County', 'Tuolumne County', 'Ventura County')  e internet\_type em ('DSL', 'Fiber Optic') | 0% | 0% |
| satisfaction\_score == '3' e tx\_concentracao\_cobranca\_mes\_q3 >= 0.19 e flg\_online\_security == '1' e county em ('Colusa County', 'Contra Costa County', 'El Dorado County', 'Fresno County', 'Glenn County', 'Inyo County', 'Lassen County', 'Madera County', 'Monterey County', 'Orange County', 'San Bernardino County', 'San Diego County', 'San Francisco County', 'Santa Barbara County', 'Solano County', 'Tehama County', 'Yuba County') | 0% | 0% |
| satisfaction\_score == '3' e tx\_concentracao\_cobranca\_mes\_q3 < 0.19 e flg\_online\_security == '0' e county em ('Colusa County', 'El Dorado County', 'Humboldt County', 'Napa County', 'Placer County', 'Sacramento County', 'San Diego County', 'San Joaquin County', 'Santa Cruz County', 'Tuolumne County') e monthly\_charge >= 74 e number\_of\_referrals < 3 e flg\_paperless\_billing == '1' | 79% | 1% |
| satisfaction\_score == '3' e tx\_concentracao\_cobranca\_mes\_q3 < 0.19 e flg\_online\_security == '0' e county em ('Alameda County', 'Butte County', 'Calaveras County', 'Contra Costa County', 'Fresno County', 'Imperial County', 'Inyo County', 'Kern County', 'Lake County', 'Lassen County', 'Los Angeles County', 'Madera County', 'Marin County', 'Mariposa County', 'Mendocino County', 'Merced County', 'Mono County', 'Monterey County', 'Nevada County', 'Orange County', 'Riverside County', 'San Bernardino County', 'San Francisco County', 'San Luis Obispo County', 'San Mateo County', 'Santa Barbara County', 'Santa Clara County', 'Shasta County', 'Siskiyou County', 'Solano County', 'Sonoma County', 'Stanislaus County', 'Sutter County', 'Tehama County', 'Trinity County', 'Tulare County', 'Ventura County', 'Yolo County') e monthly\_charge >= 74 e number\_of\_referrals < 3 e contract == 'Month-to-Month' e age >= 65 | 96% | 0% |
| satisfaction\_score em ('1', '2') | 100% | 21% |

Fonte: Resultados originais da pesquisa

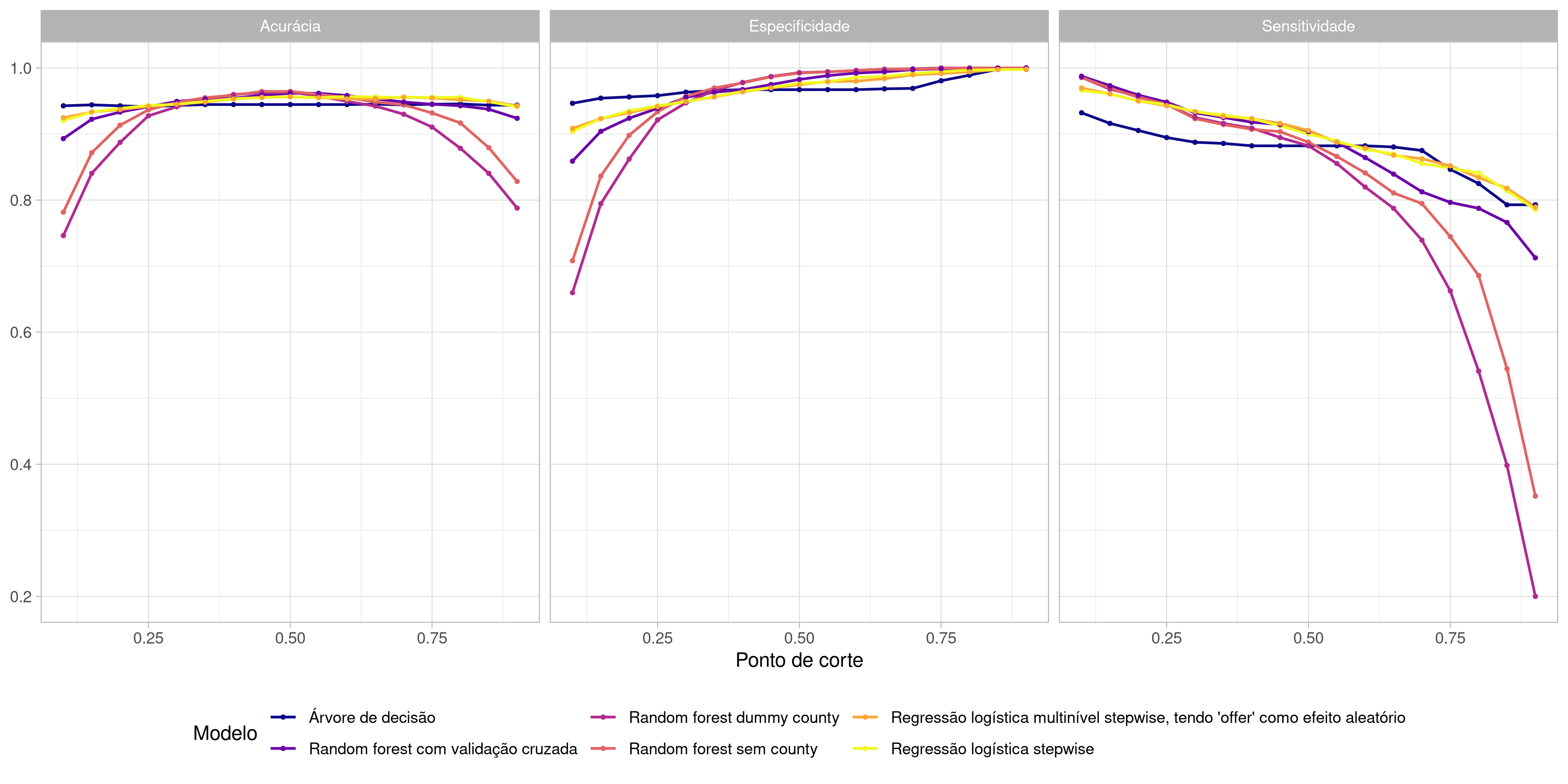


Figura 13. Indicadores da capacidade preditiva dos diversos modelos estimados, para diferentes pontos de corte

Fonte: Resultados originais da pesquisa

Tabela 15. Área sob a curva ROC, de diversos modelos estimados

|  |  |
| --- | --- |
| Modelo | AUC |
| Random forest com validação cruzada | 0,9892 |
| Regressão logística com seleção gradual de variáveis | 0,9885 |
| Árvore de decisão | 0,9854 |
| Random forest sem a variável categórica "county" | 0,9836 |
| Random forest com a variável "county" dummy | 0,9808 |

Fonte: Resultados originais da pesquisa

**Conclusão**

TODO: Escrever

**Agradecimento**

À minha mãe.

**Referências**

Anderson, E. W.; Sullivan, M. W. 1993. The Antecedents and Consequences of Customer Satisfaction. Marketing Science 12: 125-143.

Brooks, M. E.; Kristensen, K.; Benthem, K. J. van; Magnusson, A.; Berg, C. W.; Nielsen, A.; Skaug, H. J.; Maechler, M.; Bolker, B. M. 2017. glmmTMB Balances Speed and Flexibility Among Packages for Zero-inflated Generalized Linear Mixed Modeling. The R Journal 9(2): 378-400.

Caldeira, S. 2006. Retenção de Clientes. p. 165-184. In: Correia, A.; Sacavém, A.; Colaço, C. Manual de Fitness & Marketing. Visão e Contextos, Lisboa, Lisboa, Portugal.

Fávero, L. P.; Belfiore, P. 2017. Manual de Análise de Dados: Estatística e Modelagem Multivariada com Excel®, SPSS® e Stata®. Elsevier Editora Ltda., Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Ferreira, C. M. C. 2012. Um estudo sobre fidelização e retenção de clientes na área do fitness. Dissertação. Instituto Politécnico de Castelo Branco, Castelo Branco, Castelo Branco, Portugal.

Fornell, C. 1992. A national customer satisfaction barometer: The Swedish experience. Journal of Marketing 56: 6-21.

Glady, N.; Baesens, B.; Croux, C. 2009. Modeling churn using customer lifetime value. European Journal of Operational Research 197: 402-411.

Hester, J.; Bryan, J. 2022. glue: Interpreted String Literals. R package version 1.6.2. Disponível em: <https://cran.r-project.org/package=glue>. Acesso em: 22 maio 2022.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística [IBGE]. 2019. Pesquisa Anual de Serviços. Disponível em: < https://ftp.ibge.gov.br/Comercio\_e\_Servicos/Pesquisa\_Anual\_de\_Servicos/pas2019/xlsx/tabelas\_2019\_xlsx.zip>. Acesso em: 08 maio 2022.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística [IBGE]. 2019. Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101794\_informativo.pdf>. Acesso em: 09 maio 2022.

International Business Machines Corporation [IBM]. 2019. Telco customer churn (11.1.3+). Disponível em: < https://community.ibm.com/community/user/businessanalytics/blogs/steven-macko/2019/07/11/telco-customer-churn-1113>. Acesso em: 24 jul. 2022.

Jahromi, A. T.; Stakhovych, S.; Ewing, M. 2014. Managing B2B customer churn, retention and profitability. Industrial Marketing Management 43: 1258-1268.

Kuhn, M. 2022. caret: Classification and Regression Training. R package version 6.0-91. Disponível em: <https://cran.r-project.org/package=caret>. Acesso em: 22 maio 2022.

Mattison, R. 2005. The Telco Churn Management Handbook. XiT Press, Oakwood Hills, IL, USA.

R Core Team. 2021. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. Disponível em: <https://www.R-project.org/>. Acesso em: 19 out. 2021.

Robin, X.; Turck, N.; Hainard, A.; Tiberti, N.; Lisacek, F.; Sanchez, J. C.; Müller, M. 2011. pROC: an open-source package for R and S+ to analyze and compare ROC curves. BMC Bioinformatics 12: 77.

Rozzi, G. C. 2021. zipcodeR: Advancing the analysis of spatial data at the ZIP code level in R. Software Impacts 9: 100099.

Slowikowski, K. 2021. ggrepel: Automatically Position Non-Overlapping Text Labels with 'ggplot2'. R package version 0.9.1. Disponível em: <https://cran.r-project.org/package=ggrepel>. Acesso em: 22 maio 2022.

United States Census Bureau [USCB]. 2022. American Community Survey 5-Year Data (2009-2020). Disponível em: <https://www.census.gov/data/developers/data-sets/acs-5year.2017.html>. Acesso em: 22 maio 2022.

Voeten, C. C. 2022. buildmer: Stepwise Elimination and Term Reordering for Mixed-Effects Regression. R package version 2.4. Disponível em: <https://cran.r-project.org/package=buildmer>. Acesso em: 22 maio 2022.

Walker, K. 2022. tigris: Load Census TIGER/Line Shapefiles. R package version 1.6. Disponível em: < https://cran.r-project.org/package=tigris>. Acesso em: 22 maio 2022.

Walker, K.; Herman, M. 2022. tidycensus: Load US Census Boundary and Attribute Data as 'tidyverse' and 'sf'-Ready Data Frames. R package version 1.2. Disponível em: <https://cran.r-project.org/package=tidycensus>. Acesso em: 22 maio 2022.

Wickham, H. 2019. stringr: Simple, Consistent Wrappers for Common String Operations. R package version 1.4.0. Disponível em: <https://cran.r-project.org/package=stringr>. Acesso em: 22 maio 2022.

Wickham, H.; Averick, M.; Bryan, J.; Chang, W.; McGowan, L. D.; François, R.; Grolemund, G.; Hayes, A.; Henry, L.; Hester, J.; Kuhn, M.; Pedersen, T. L.; Miller, E.; Bache, S. M.; Müller, K.; Ooms, J.; Robinson, D.; Seidel, D. P.; Spinu, V.; Takahashi, K.; Vaughan, D.; Wilke, C.; Woo, K.; Yutani, H. 2019. Welcome to the tidyverse. Journal of Open Source Software 4: 1686.

Wickham, H; Bryan, J. 2019. readxl: Read Excel Files. R package version 1.3.1. Disponível em: <https://cran.r-project.org/package=readxl>. Acesso em: 22 maio 2022.

Zeileis, A.; Hothorn, T. 2002. Diagnostic Checking in Regression Relationships. R News 2(3): 7-10.